

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2016

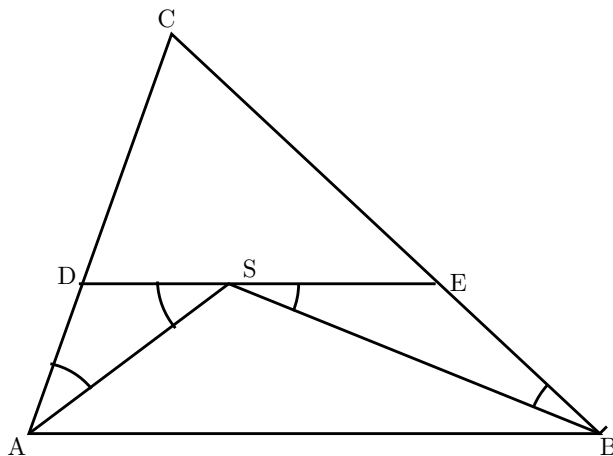
Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za VII razred osnovne škole

1. Nemanja je za večeru pojeo 40% torte, a Marko je pojeo 150 grama. Filip je pojeo 30% ostatka torte i još 120 grama, a Maša je pojela preostalih 90 grama torte. Kolika je početna masa torte?

Rješenje: Neka je početna masa torte m grama. Nakon što Nemanja i Marko pojedu svoje dijelove torte, preostaje $(100\% - 40\%)m - 150 = 60\%m - 150$ grama torte. Od toga, Filip pojede 30% i još 120 grama, pa Maši ostane $(100\% - 30\%)(60\%m - 150) - 120 = 70\%(60\%m - 150) - 120$ grama torte. Kako znamo da je Maša pojela poslednjih 90 grama torte, dobijamo jednačinu $70\%(60\%m - 150) - 120 = 90$, odnosno $\frac{7}{10}(\frac{3}{5}m - 150) - 120 = 90$. Rješavanjem ove jednačine, dobijamo da je početna masa torte $m = 750$ grama. \square

2. U trouglu $\triangle ABC$ važi $2|AB| = |AC| + |BC|$. Simetrale uglova $\angle BAC$ i $\angle ABC$ sijeku se u tački S . Kroz tačku S povučena je prava paralelna stranici AB . Ona siječe stranice AC i BC u tačkama D i E , respektivno. Izračunaj obim trougla $\triangle ABC$ ako je obim trougla $\triangle CDE$ jednak 100cm .

Rješenje: Na slici je prikazan zadati trougao.



Označimo sa O obim trougla $\triangle ABC$, a sa O_1 obim trougla $\triangle CDE$.

Primijetimo da su uglovi $\angle DAS$ i $\angle ASD$ jednaki, kao uglovi sa paralelnim kracima. Oдавде slijedi da je trougao $\triangle ASD$ jednakokraki, pa je $|AD| = |DS|$. Analogno, uglovi $\angle SBE$ i

$\angle ESB$ su jednaki, pa je i trougao $\triangle BES$ jednakokraki, odnosno $|BE| = |ES|$.
Obim trougla $\triangle ABC$ je

$$O = |AB| + |BC| + |AC|$$

a kako je $2|AB| = |AC| + |BC|$, to je $|AB| = \frac{1}{2}(|AC| + |BC|)$, pa je

$$O = \frac{1}{2}(|AC| + |BC|) + |BC| + |AC| = \frac{3}{2}(|AC| + |BC|)$$

Dalje, kako je $|AC| = |AD| + |DC|$, $|BC| = |BE| + |EC|$, $|AD| = |DS|$ i $|BE| = |ES|$, dobijamo da je

$$|AC| + |BC| = |AD| + |DC| + |BE| + |EC| = |DC| + |EC| + |DS| + |ES| = |DC| + |EC| + |DE| = O_1$$

Na kraju, $O = \frac{3}{2}(|AC| + |BC|) = \frac{3}{2}O_1 = \frac{3}{2}100 = 150cm$. \square

3. Svi učenici u odjeljenju imaju 9 ili 10 knjiga. Svi učenici koji imaju 9 knjiga uvijek govore istinu, dok učenici koji imaju 10 knjiga nikad ne govore istinu. Razgovaraju tri učenika:

Milan: "Nas troje zajedno imamo 30 knjiga."

Marija: "Milan ne govori istinu!"

Ivana: "Ni Marija ni Milan ne govore istinu!"

a) Govori li Milan istinu? Obrazložiti odgovor.

b) Po koliko knjiga imaju Milan, Marija i Ivana? Obrazložiti odgovor.

Rješenje: a) Pretpostavimo da Milan govori istinu, odnosno da oni zajedno imaju 30 knjiga. To znači da svi imaju po 10 knjiga, pa i sam Milan. Ali, ako Milan ima 10 knjiga, to znači da on ne govori istinu, što je u suprotnosti sa našom pretpostavkom. Odavde zaključujemo da naša pretpostavka nije tačna, odnosno da Milan ne govori istinu.

b) Kako znamo da Milan ne govori istinu, on ima 10 knjiga. Marija je optužila Milana da ne govori istinu, i time rekla istinu, pa ona ima 9 knjiga. Ivana je optužila i Milana i Mariju da ne govore istinu, ali je Marija govorila istinu, pa zaključujemo da Ivana laže. Dakle, Ivana ima 10 knjiga. \square

4. Zbir 21 uzastopnih cijelih brojeva je 2016. Koji su to brojevi?

Rješenje: Označimo tražene brojeve sa $x, x + 1, \dots, x + 20$. Znamo da je

$$x + (x + 1) + \dots + (x + 20) = 2016$$

Sređujući ovaj izraz dobijamo

$$21x + (1 + 2 + \dots + 20) = 2016$$

odnosno

$$21x + \frac{20 \cdot 21}{2} = 2016$$

Odavde dobijamo jednačinu $21x + 210 = 2016$, čije je rješenje $x = 86$.

Dakle, traženi brojevi su 86, 87, ... , 106. \square